

在探索数学奥秘的路上 美和实用往往自然产生

——知名数学家丘成桐给中学生讲授的一堂课

数学作为基础学科,对于人类认识世界、改变世界起着重要的作用,不论是相对论、量子力学的诞生,还是现代医学、人工智能的快速发展,数学都在其中起到重要作用。

培养拔尖创新人才,数学教育的重要性更是不言而喻。近年来,知名数学家丘成桐投入大量时间和精力用于基础教育阶段的数学人才培养。日前,在上海数学与交叉学科研究院成立仪式上,丘成桐为来自全国多所中学的丘成桐班授牌,其中包括上海中学和民办华育中学。在授牌仪式上,他为中学生讲授了一堂特别的数学课。本期刊发部分讲课内容,以飨读者。

——编者



■丘成桐

数学是一门美丽且实用的科学,自诞生以来,就让所有数学家心驰神往。美丽而实用的数学,在自然界中自然而然地产生,这本身就非常奇妙。更奇妙的是,人们往往追求的是数学的实用价值,但却在这个过程中发现了数学之美。对数学家而言,在探索数学奥秘的路上,美和实用往往会自然产生,这是非常有趣的经历。

其实,每个学者对美都有不同的见解。清华大学求真书院曾邀请美术学院刘巨德教授作讲座,讲述艺术家眼中的美。在这里,我也为大家讲一讲数学家和科学家眼中的美。

没有一个学科像数学那样经得起时间考验

在我看来,世界上的美,必须以真理为基础,这才称得上“美”。刘教授说,美是划时代、超越时空的。然而,超越时空、唯一能够存在的只有真理。坦白说,我认为真理其实只有一个——那就是数学。没有一个学科能像数学一样,对世界的描述经得起时间考验。从古希腊学者到牛顿、爱因斯坦等科学家,再一直到今天,人类对世界的观察以及据此形成的理论,不停地在变化;在实验室中,随着技术不断发展、精益求精,我们对物质世界的观察也不断得出新的结果,以往的结论不断被推翻。

相对论和量子力学,使得20世纪的科学家产生了不同的观点,它们改变了古典的物理学,使我们对宇宙有了更深一层的了解。无论是极小粒子的结构,或者是遥远的太空,我们现在能够观测到的现象都是前人难以想象的,因此从某种意义上说,物理学的真理在不停地改变。

在这一连串宏伟的科学发展中,数学家做出了巨大的贡献。在很多重要的基础物理学的发展过程中,往往是数学家带着物理学家向前走,然后群策群力地去了解宇宙。

让我们回顾科学界中一个极为重要的发展:牛顿的伟大贡献之一是发展了微积分在物理学上的重要应用,从而引起了数学本身的革命。19世纪初,数学家高斯和黎曼为了深入了解电磁,发展了一套数学理论,这套理论最后由麦克斯韦完成,由此建立了完美的麦克斯韦方程组。在20世纪初,德国数学家、物理学家外尔又通过几何的方法来研究麦克斯韦方程,使它们成为他提出的规范场的一部分,外尔也是第一个提出规范原理的数学家,这些观念成为现代物理学的基础。我们也知道,1926年,法国几何学家嘉当发展了联络理论,也就是今天的非交换规范场论。

此后,大量的数学家,包括中国数学家陈省身先生在内,都从事非交换规范场的研究。古典的规范场可以说全部是由几何学家完成的。但是规范场在物理学上的量化工作,要等到20世纪60年代才由几位大物理学家完成;到70年代,理论物理的标准模型成为基础科学中最重要的工作。在上述工作中,都用到了极为深奥的数学理论。这些理论,其实并非当年的物理学家所能吸收。

物理学家对真理的了解不停在改变,但其中运用到的数学理论,其正确性从来没有被人质疑过。因为它们的基础是一些难以质疑的假设,这些假设是最简单的逻辑系统,这些系统也

是人类一切文明的基础。

大道至简,是对数学之美的归纳

数学家用严格的逻辑系统建设了不同的数学系统来描述大自然,从中看到统领大自然的规律。在这个过程中,我们看到大自然如何建立起自己的结构,它瑰丽壮观,万物难以比拟。

大道至简,是对数学之美的归纳。最简单的数学,从1=1开始,到1+1=2,1+2=3……不停推导下去。人通过这种方式,认识到自然数,从而有了数学。人类从数学诞生之初,从计算牲畜、税收开始,就认识到这些抽象概念是对事物美妙地归纳和总结。这与美有着密切的关系。数学把现实抽象为真理,而美建立在真理之上。同时,美引导着人类不断发现真理。没有对美的追求,人类很难察觉真理的存在。数学的发展,就是有着人类对美的追求,感知真理并找到真理之所在。

举一个直观的例子。不少画家喜欢画竹子,因为竹子优雅、坚韧、颇有风骨,折射了中国知识分子精神层面的追求。画家描绘竹子的风骨,有很多方式。而对于数学家来讲,他们第一眼看到竹子,看到的是一条直线,他们也和画家一样,会为这条直线增加许多内容。

比如,直线的构造,对于数学家来讲,就是一件饶有趣味的事情。在这条直线上,我们首先标注自然数,即整数;接着,为了丰富它的构造,我们又构造了分数,比如1/2、3/4等等,密密麻麻地画在这条直线上。

下一步怎么办?希腊人构造了无理数。他们用垂直的线构造两边长为1的三角形,斜边的长度为 $\sqrt{2}$ ——这就是希腊毕达哥拉斯学派的发现。 $\sqrt{2}$ 就是希腊毕达哥拉斯学派的发现。 $\sqrt{2}$ 就是无理数。在成功构造了无理数之后,我们在直线上又增加了一大类数字,直线上的数字更密了一些。但这还不够,我们开始用圆规和直尺构造数字,但无论如何,还是没能填满这条直线。

差不多又过了1500多年,我们才完全把直线填满,把这条竹子变成一条完备的实线。为了达到这个目标,数学家花了很多功夫,才终于对实线有了透彻的了解。这就好像画家费墨墨描摹竹子的意蕴,数学家也用了不少抽象的数的概念构造直线。

15世纪时,数学家开始为这根直线引入了虚数,这将我们的关注从一条直线变成二维空间——认知二维空间是人类历史上非常重要的一件事。虚数产生以后,我们对很多波动、波动的种种现象的了解都清楚不少。

画家笔下的波,其实也跟虚数有密切关系。但是,目前我们还无法将富有活动力的波生动地画出来,这是因为我们对虚数的了解不够清楚。虚数是研究动力系统最重要的数字,也是研究量子力学所要用的。从引入正整数如1、2、3等,发展到一条直线,到虚数,到完整地解释二维空间,再到三维空间——这个过程其实是通过数学的发展,慢慢地逐步完成的。而这一路有条理地推进,除了数学严格地推理之外,还有数学家对美的追求。数学家希望达到的目标是:人看到的现象、眼中的世界,应该尽量完备。如果存在一些尚无法描述的空间,那就不够理想,必须要加以更

透彻的理解才行,这就要从数学角度绘制一个完美的图像。在数学家眼中,这个图像犹如一幅图画。从整数的点加上去变成一条直线——这令人满意。但是仅仅如此还不够,加上虚数,就可以描述二维空间;二维空间还是不够,于是就一路加上去……

数学家依靠美的指引,寻找数学真理

有人会说,竹子明明不是一条线,为什么数学家这么笨,将它看作是一条线。这说得很正确,竹子的表面是一个圆柱,直线不过是描述竹子特征的第一步,这一步并不完全符合物理现象。

我们继续描述竹子。找一个固定半径的小圆圈,它和直线垂直,圆心沿着直线拉出去,就可以得到我们期待的圆柱。而描述这个圆柱最佳的数学方法是复数。加上复数的结构后,圆柱在数学上叫做黎曼面。黎曼面在描述二维空间及在现代物理学中的应用广泛,实在威力无穷。

当上述小圆圈的半径变得很小时,圆柱就是一条直线,这是高维空间能够用来描述低维度的现实界的一种方法。圆圈的半径随着圆心的位置变动时,圆柱可以变成竹节。

几何学家看竹子,可以用上述的观点。但是西方科学革命的领导人物伽利略大概不会这样看,因为他会研究竹子的种种物理性质,例如弹性、结构性等问题。这些问题到牛顿力学和微积分出现后,得到了更完美的解决,数学家如费马、欧拉、拉格朗日等一直参与其中。

近代物理学中,我们可以将直线用三维或者四维的平坦空间来代替,而圆圈可以用更复杂的几何体来代替。一个重要的几何体就是卡拉比-丘(Calabi-Yau)空间,从中可以描述种种不同的物理现象。

所以说,数学家看一根翠竹与画家或艺术家是不同的。数学家会有条有理地通过推理不断加深理解,之后再描述它。现在,我们推理到三维空间,还是觉得不够。在19世纪,开始了四元数的发现。不久后,更发现了八元数。

不久后,更发现了八元数。因而进入高维空间。高维空间能够表现生活中的更多现象。高维空间是一个重要的问题,有几十、几千、几万个粒子滚动时,就形成了高维空间,而现在人工智能要到几千万维空间。高维空间里的种种现象都很美,这里头有很多真理,即数学的存在。

这就是数学家眼中的世界,以及数学家对美的追求。面对眼前的万千世界,以及如此多的无法把握的现象,我们依靠美的指引,寻找其中的数学真理。从一根竹子引出一条直线,到二维空间,逐渐进入高维世界,连接起来,不断丰富,发展出这个重要的学科。这其中包含了数学的精神,从简到繁,再用一个简单的道理描述大自然最复杂的现象,最终无限靠近真理。

无论是古希腊还是文艺复兴时期,这个精神一以贯之。文艺复兴时期的绘画艺术就与数学密不可分,从而促发了几何的发展——这也说明了美与数学从来都是密不可分的。

现代数学为人工智能奠定理论基础

数学在现代科技中有众多应用。拿几何学而言,不仅有令人着迷

的理论,在现代工程实践中发挥着巨大作用。

现代科技需要大量薄膜学的知识,因此如何精准描述二维曲面是工程学不可缺少的学问。二维曲面的研究可以追溯到伟大的科学家欧拉,他与牛顿时处同一时代,用微积分来解释几何学,创造了变分法来计算一些重要的几何图形。黎曼和他的老师高斯毫无疑问是现代几何学的两位奠基人。高斯是现代几何学的先父,而真正的创始人是黎曼,在19世纪中期提出了黎曼几何和共形几何理论,不仅在理论物理中起到关键的作用,还在计算机图形学、几何建模、医学图像得到广泛应用。

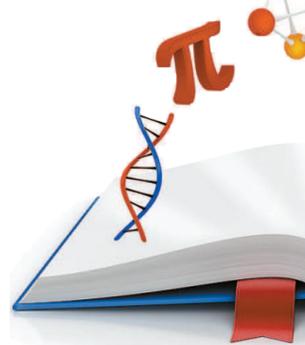
我和我的学生冒险峰用黎曼曲面的方法发展出来的理论,以后发展成为图像学中重要的分支——计算共形几何。共形几何是研究共形变换下不变量的学问。所谓共形映射就是保持角度不变的映射。例如,我们将三维人脸曲面映射到二维平面圆盘,在人脸上随意画两条相交的曲线,曲线上的曲线被映射到平面曲线,但是相交角度不变。由于保角变换具有唯一性,因此很容易去做人脸比对。

当前,人工智能和数据科学的技术已被广泛应用于临床诊断、手术指导、风险预测等不同领域。可以说,现代数学为人工智能奠定了理论基础,且为人工智能突破瓶颈指明了发展方向。另一方面,人工智能也为数学提出了挑战,推动了数学的发展。

盘点20世纪科技的重大变革,其基础在于人类对于物质结构的深入了解。相对论和量子力学是这些学问的基础,数学家对这些学问都有深入的贡献。自从20世纪70年代高能物理学的标准模型建设成功,统一了物理学三个不同的场以后,物理学家的最大愿望是如何将引力放在标准模型中。这个融合需要极有创意的观念的突破,我相信它对我们期待的科技突破——量子计算,会有深度的影响。如何构造量子几何学,将会是一个重要的里程碑,也是真和美的结合。

万物之散聚兴灭,天地宇宙之结构,人事社会经济之脉络,莫不与基础数学有关。数学能够提供真和美,中华五千年要求的善,孔孟所说的仁和义,都可以在真和美中寻找,也就是说,可从数学学海中呼之而出。所以基础数学,是立国的基本,东西文化的桥梁。中华文化能够传承下去,千万年不衰,不能不注重基础数学。

(作者为清华大学求真书院院长、菲尔兹奖首位华人得主。文章由丘成桐授权刊发,未经许可,不得转载)



专业学位硕士生(专硕)项目的设立,从顶层设计来看,是希望使研究生有更好的解决实际问题的能力。但很多高校只是把专硕项目当作扩大招生规模的一种方式,专硕和学硕之间的界限并不清楚。

如果就按照学硕的培养模式去培养专硕,对于导师和院系来说是最简单、最方便的。但眼下,随着专硕扩招,后续如何培养,还需要根据实际情况想清楚,关键是不能“拍脑袋”“一刀切”。如果我们还是一味沿用原先的同质化做法,那只会离时代发展的要求越来越远。

■马臻

近年,专业学位硕士生(专硕)持续扩招,专硕培养的定位越发引起重视,甚至一些高校开始考虑未来停止学术型硕士(学硕)招生,只招专硕和博士。2023年12月,教育部发布《教育部关于深入推进学术学位与专业学位研究生教育分类发展的意见》。今年4月26日,全国人大常委会通过学位法,国务院学位办、教育部政策法规司负责人表示,明确学位法分为学术学位和专业学位等类型“是本次立法的一项重大突破”。

学硕和专硕的明确分类,也使我们不得不直面近年来高教界一直存在的一个问题,那就是专硕、学硕在人才培养上的同质化。

培养同质化,导致专硕不“专”

人们常认为,攻读学硕是为继续深造打基础,适合有志于从事学术研究的人;而读专硕是为了就业,专硕主要是培养学生的专业应用能力。就目前而言,专硕人才培养的主要问题是和学硕区分不明显,存在同质化的问题。

在理想状态下,专硕支付了更高的学费,就应该受到更“实用”的教育,得到更好的待遇、有“更好”的出路。但现实并非如此,比如,有些学校规定,专硕不能参评学业奖学金,只能参评难度更大、名额更少的冠名奖学金和国家奖学金;有些学校招了很多研究生,暂时无法解决所有人的校内住宿,于是只能把专硕安置在校外公寓;还有些用人单位认为专硕没有学硕优秀,在招聘时对专硕“另眼相待”……

但随着专硕规模的扩大和高校培养专硕经验的丰富,专硕教育一定会得到更多重视,培养体系也必须更加完善。《教育部关于深入推进学术学位与专业学位研究生教育分类发展的意见》的发布,也正说明了这一点。

专硕项目的设立,从顶层设计来看,是希望研究生有更好的解决实际问题的能力。但很多高校只是把专硕项目当作扩大招生规模的一种方式,专硕和学硕之间的界限并不清楚。一些院系和课题组更是把专硕视为研究生招生名额增加的途径,导师把招收专硕当成充实课题组、增加“干活”人数的一种途径。专硕入学后,课程与学硕类似,上课也和学硕一起上,也需要进课题组做实验,甚至还被要求发表科研论文才能毕业,而对于专硕培养方案中要求的为时数月的企业实习,则采取“敲公章”“开实习证明”的方式蒙混过关。

各种“摆不平”,让专硕难按“专”的要求培养

其实,专硕和学硕培养同质化的问题并非现在才引起关注。针对这一问题,教育界的不少专家都曾提出过各种解决方案,包括严格执行专硕的培养方案,把专硕派到校外企业基地等。但现实情况很复杂,“摆不平”是其中的一个重要原因。

首先,导师招收学生、成立课题组,无形中就有了“生产关系”。导师需要拉来科研项目,让学生做项目、发表科研论文,并向项目资助方“交账”,进而申请新的项目。这样一来,研究生一旦被派往校外实习基地,就很难为课题组的项目服务。同时,研究生在校外取得的研发成果(如果有的话)也涉及知识产权的归属。

其次,专硕要毕业,就要写出学位论文并通过评审。如果专硕全身心地在导师的课题组做科研,至少能保证学位论文的“工作量”。但如果花几个月时间去校外实习,实习内容和学位论文没有密切关系,得到的工业研发结果也很难写入学位

论文,这很可能影响学位论文的质量,学位论文甚至很可能通不过盲审。

针对上述情况,也有人提议,专硕的学位论文是不是可以多元化——既可以写科研导向的学位论文,也可以写工程设计、工程应用的学位论文。但问题是,现代工程并非一个人能够完成的,工程设计也需要群策群力。一位专硕到企业参与工程,在学位论文中如何区分个人贡献和集体贡献呢?更何况,有的工程持续几年之久,但学生需要快速得到结果,并申请学位。

除了上述原因,还有很多别的原因。比如,很多理工科导师原先接受的科研训练就是以发表论文为导向,他们没有做过工程项目的经历,因此指导专硕做工程类的课题也会有困难,只能让专硕在课题组沿用老的套路做研究。再比如,专硕到企业参加实习,涉及交通、住宿、安全等问题,不少导师从内心来说,不希望见到发生各种“意想不到的麻烦”。

而且,专硕未必真的喜欢去院系指定的实习基地实习。除了担心完不成学位论文,很多专硕想的是毕业后“转行”从事别的领域的工作,因此他们需要的是与将来的就业方向匹配的自选实习,而不是去学校规定的地方实习。如果硬要专硕去院系指定的实习基地实习,他们甚至会消极怠工,最终影响实习效果和院系声誉。

专硕培养、扩招,不能“一刀切”

可见,对专硕、学硕进行区别培养是有难度的。特别是眼下,随着专硕扩招,后续如何培养,还需要根据实际情况想清楚,关键是能不能“拍脑袋”“一刀切”。

比如,假设一个院系强行规定所有专硕都到院系指定的几个实习基地去实习数月,那么,实习的内容有可能和学位论文的选题不匹配。组织这么多学生,又涉及住宿、交通、安全等问题,最终学位论文体现不出工作量。

那么,专硕去企业实习,有没有成功案例呢?当然院系和课题组更是把专硕视为研究生招生名额增加的途径,导师把招收专硕当成充实课题组、增加“干活”人数的一种途径。专硕入学后,课程与学硕类似,上课也和学硕一起上,也需要进课题组做实验,甚至还被要求发表科研论文才能毕业,而对于专硕培养方案中要求的为时数月的企业实习,则采取“敲公章”“开实习证明”的方式蒙混过关。

在校外参加研讨会时,我曾听一些报告者介绍他们在院系培养专硕的一些做法,包括建设了几十个实习基地,把研究生派到相关的企业。但令人困惑的是:专硕一年级上学期需要上课,假设一年级下学期参加企业实习,那么到二年级才开始做导师布置的课题,到了二年级下学期刚开学就要交学位论文,这怎么可能完成?能通过盲审吗?假设因为时间紧,专硕无法给导师产出科研论文,那导师会有积极性吗?

看来,专硕培养“盘根错节”,不仅涉及具体的做法,还涉及课题组的“生产关系”以及对导师、学生的评价体系。结合这次学位法的通过,国务院学位办、教育部政策法规司相关负责人在接受记者采访时表示,将以科教融汇、产教融合为方向,注重对现有人才培养模式的改造升级。《教育部关于深入推进学术学位与专业学位研究生教育分类发展的意见》也提出了一些有价值的意见。

2023年12月底,复旦大学印发的《复旦大学研究生教育博英计划方案(2023-2025年)》,也以显著的篇幅,提出深化专业学位培养模式改革,推进专业学位课程建设深化提质,强化研究生创新实践能力培养。

研究生教育的车轮滚滚向前,专硕扩招是大势所趋。尽管优化专硕培养机制不是一蹴而就的,但能够把问题“掰开来”坦诚地讨论交流,是一件好事。假设我们不交流、不讨论,只是机械地、“一刀切”地执行相关政策,那只会离时代发展的要求越来越远。教育界的确需要认真研究、充分讨论这个话题,并提出可复制推广的经验案例。这将有助于相关政策在更大的范围内具体落地。

(作者为复旦大学环境科学与工程系教授)