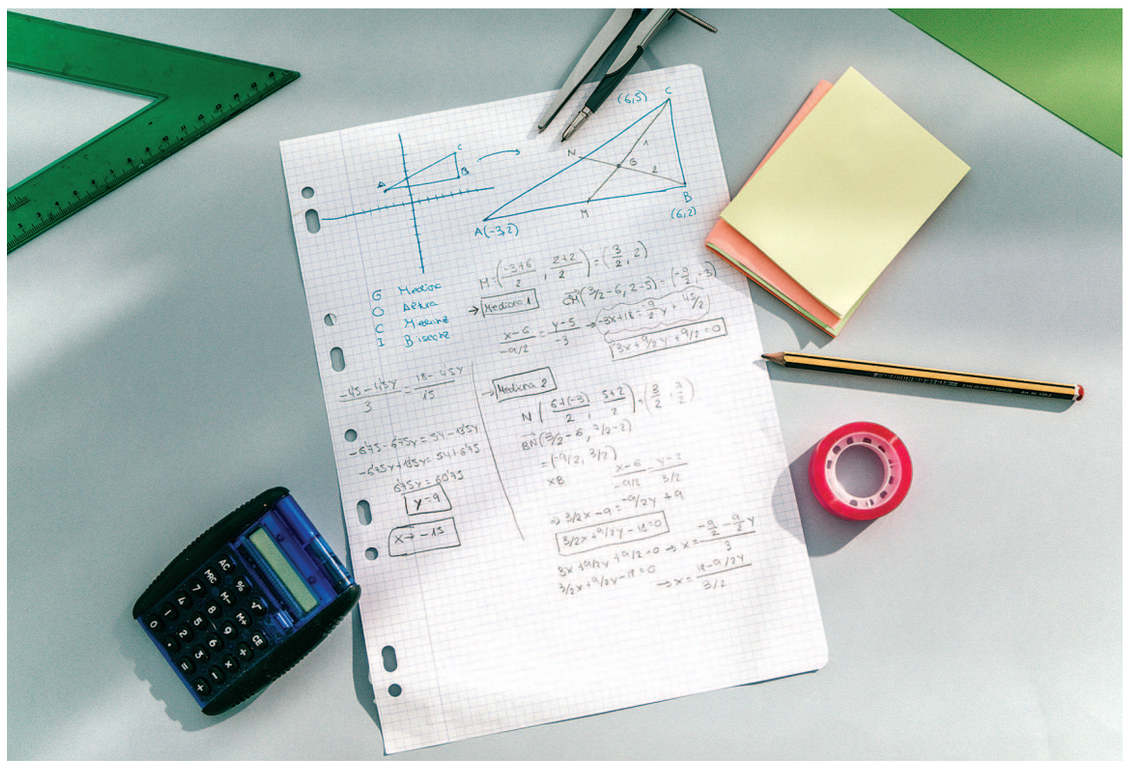
为什么我们始终保持对数学的敬意？

11月4日，华裔数学家张益唐的学术论文“离散均值估计和朗道-西格尔零点”在预印本平台arXiv上发布。这是自2013年5月16日张益唐在《数学年刊》(Annals of Mathematics)发表其成名作“素数间的有界距离”之后时隔9年再一次用学术论文引发国内外学界的关注。

11月8日上午，张益唐在北京大学在线作报告讲解他的最新论文，在各个直播平台都吸引了大量学界内外的听众。

数论这样一个古老的数学研究分支，从诞生之初就吸引了国内外众多数学家前赴后继地投入研究，对于各类至今未解的猜想，数学家们从来没有放弃过研究。这些研究堪称是数学界最基础的研究，但是其独特的魅力在数学之外闪现时，却总是在出人意料处。

——编者



■李吉有

数学家张益唐教授取得的一项最新成果是关于朗道-西格尔零点猜想方面的研究，与黎曼猜想有密切联系。鉴于此结果在数论中有诸多应用，有助于数学家更好地认识等差数列中的素数分布规律，这也被认为是他继孪生素数猜想后取得的更大的突破性成就。

与数学相关的话题，总是能引发社会的热议。我们不禁要问，数学为什么具有那么持久的生命力？数学对我们每个普通人，对我们的国家与社会，对我们的教育到底意味着什么？

此外，也有很多人关心数学到底有什么用。其实，一言以蔽之，数学的用处在于“无用之用”，数学也可说是众妙之门。

“不懂几何者勿入内”，这句名言的深意是什么

数学是什么？狄拉克说，用数学描述基本物理定律似乎是自然的基本特征之一，需要相当高的数学水平才能理解它。你可能会想：为什么大自然以这样方法建造？一种回答是，我们现在的知识似乎表明它是如此构造的，我们必须接受它。也有人可能会说，自然是一位非常高级的数学家，她用非常先进的数学来构建宇宙。在数学上的微弱尝试，帮助我们能理解一点宇宙，并且，随着我们开发越来越高级的数学，也希望能更好地理解宇宙。

另一方面，人类因为追求审美而发展的音乐、美术、绘画、建筑等学科，其背后都能有深刻的数学背景。譬如，音乐的很多要素是和数学紧密相关的。在音律学中，五度相生律和我国古代的三分损益法的原理是什么？为什么我国明代科学家朱载堉发明的十二平均律那么重要？解释这些事实，背后完全是数学的原理。

关于数学是什么，我们可以从一本书说起。大约公元前三世纪，古希腊有一本著作《几何原本》，这本书包含了5条公设、131条定义和465条命题。简单来说，这里的公设指“不证自明”的事实，而命题是经由公设演绎推理得到的结论。

在中学教科书中，几何的绝大多数内容，以及代数的一部分内容，其实都来自这本书。可以说，《几何原本》对人类文明的影响非常大。几何(Geometry)这个词中，“geo”的意思其实就是地球，“metric”的意思是测量。有人也许都听说过柏拉图学院的名言：“不懂几何者勿入内”，这显示在相当长时间的人类文明中，数学对启迪人类智慧以及产生哲学思想具有非常重要的作用。甚至可以毫不夸张地说，这是人类文明史上迄今最为重要的教科书。

中国明代科学家徐光启最先翻译了《几何原本》的部分内容，正是他把“Geometry”翻译成几何。徐光启在翻译《几何原本》的前言中提到他为什么要主张学习这本书。他说这本书最大的用处是可以“习人之灵才，令细而确也”，意思就是通过学习会形成很好的、很严格的逻辑思维体系，做事会非常有逻辑性、条理性，也会非常精确化、数字化，更重要的是可以培养数学的思维方式，可说是能够带给我们超越人类经验的思辨能力和认识宇宙万物的勇气。

无处不用到的数学，是很多学科的灵魂

当然，数学的功能不仅在于教育，数学还有实际用处。同样，在《几何原本》的前言中，徐光启说“典乐五官者，非度数不为功”，这就是说音律、历法等等实际上都必须要用到数学，至于建筑工程、航空航天等等，更是需要用到数学。华罗庚也曾说过，“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用到数学”。

我们再举一个数学应用于自然科学的例子。人类生活在地球上，因此，“球面的几何”对我们非常重要。一般中学教科书里的平面几何也叫欧式几何，还有一种是双曲几何。而“球的几何”后来被发展成黎曼几何，黎曼几何又被爱因斯坦用来建立了广义相对论。爱因斯坦完美地通过引力空间的弯曲来解释物质之间的引力，这是科学史上最完美、辉煌的成就之一。

当然，除此之外还有很多数学所用的地方。比如，有素数的音乐之称且至今真假莫辨的著名难题——黎曼假设的主角“黎曼函数”，就源自调和级数，而调和级数的源头正是音乐中的和弦，这一点并非偶然，而是因为数学乃音乐之魂。天文学也必须用到几何，牛顿力学要用微积分，即便是电磁学也需要用微分方程，至于现在流行的机器学习，更是与概率统计、线性代数密不可分；信息安全要用到代数、数论、组合等等。

诺奖经济学奖得主中，约20%是职业数学家

大家或许还记得，中学物理教过的几个定理，包括高斯定理、法拉第定理、麦克斯韦方程等等。但是大多数人直到大学学完高数后，才能真正明白这些公式的真正含义。不论我们是在线下还是云端相聚，能够互相交流，都是因为这些方程式在起作用。这就是数学在描述自然规律时的体现，同样数学也在认识宇宙的过程中具有无可替代的作用。

数学和自然科学，包括与天文、物理、化学、生物，以及地质学、地球物理学等都有着密切的关系。现代技术，即所谓的Modern technology，虽然屡次获得突破都是因为近代工业革命，但是背后也与数学的发展有极大的关系，尤其是微积分的发展。比如，数学与医疗科学，大家经常去医院做CT或核磁共振，其背后就是数学和物理的知识在起到作用，至于计算机科学更是受到数学巨大的影响。

甚至，严格意义上来说，数学中分化出很多现代科学的分支。比如密码学，真正的密码学就是建立在信息论、代数和数论的基础上，密码学保证了现代通讯技术的健康发展，编码理论使得我们能够高效流畅地交流信息。至于工程科学与工业制造，也与数学紧密相关，例如大飞机设计与流体力学等等。

当前，社会科学也越来越多地在使用数学。比如统计学，这门学科曾经本来就是数学的一部分。再看金融学、甚至哲学，其实都与数学密不可分。实际上，古希腊几乎所有的哲学家都是数学家，原因是从某种程度上来说，只有对我们生活的空间、对宇宙有了本质的认识，才会有哲学的思考，才会产生对人类终极命运的思考。

至于经济学等学科也都与数学的关系密不可分。代表经济学最高成就的经济学诺贝尔奖迄今为止产生的90余位得主中，拥有数学学位者超过半数，其中职业数学家约占20%。首届(1969年)两个得主，一位拥有数学博士学位；另一位则拥有数学学士学位和物理学博士学位。

美国芝加哥大学是诺贝尔经济学奖的大户，芝大经济学院推荐给本科生的13门核心课程中，数学课程占了5门，还有1门统计学也可认为是数学课程。

时任瑞典阜家科学院院长的埃里克·伦德博格在诺贝尔经济学奖首届颁奖仪式上说：“过去40年中，经济科学日益朝着用数学表达经济内容和统计定量的方向发展。”

热爱数学，你就是那个仰望星空的人。

（作者为上海交通大学数学学院教授）

相关链接

颁给数学家的诺贝尔经济学奖

经济学奖获得者中数学家众多。这里就以2012年诺贝尔经济学奖为例。

两位经济学奖得主是哈佛大学商学院教授阿尔文·罗思和加州大学洛杉矶分校的劳埃德·沙普利，他们的主要贡献是稳定匹配理论和市场设计。

稳定匹配理论广泛地应用于实际生活中。例如，如何设计高考填报志愿方法，如何将捐献的器官分配到需要的病人，如何将实习医生分配到各个医院等。沙普利的主要贡献是提供了一个理论上的最优方案，称为“盖尔-沙普利方法”(Gale-Shapley method)。

以高考填报志愿为例，该方法的基本思想是，让分数最高的人先报，每个大学挑选它最中意的学生，剔除掉其他候选人；然后让分数次高的人填报，每个大学依次挑选最中意的人；最后直到所有学生都被录取为止。这一机制可以确保公平和效率。目前，我国多数省份高考录取采用的平行志愿即是该理论的一种应用。

沙普利是美国杰出的数学家和经济学家，对数理经济学特别是博弈论理论作出过杰出贡献，被认为是博弈论的化身。他也是1994年诺贝尔经济学奖得主约翰·纳什的博士同学，纳什称沙普利是自己的生活导师和朋友。

沙普利获奖的最大原因是他和大卫·盖尔于1962年通过研究所谓“稳定婚姻”所创的“盖尔-沙普利方法”，其核心是市场匹配的合理原则应该是“情投意合”而非“价高者得”，也只有这个优美而英明的理论可以解释为什么有优秀未婚女性！

关于稳定婚姻问题(简称SMP)，早在大约2500年前苏格拉底就曾有精彩绝伦的论述：By-all means marry, If you get a good wife you will become happy and if you get a bad one you will become a philosopher.(千方百计要结婚，贤妻带你走进天堂，悍妇造就哲学巨匠。)

约50年前，盖尔与沙普利引入“稳定婚姻”，该问题如下：

设有N个想结婚的男子和N个想结婚的女子，他们每个人都对每个异性按照自己钟情的程度给予排名(排名越靠前表示钟情的程度越深)，稳定婚姻问题的研究目标是找到某种匹配，使得每个人的婚姻都是稳定的。

什么样的婚姻才是稳定的呢？

首先，稳定婚姻当然应该是每个人都有自己的配偶(在男女人数不相同的情况下，应该使数目较小的那个性别的每个人都有配偶)，其次，稳定婚姻匹配应该是没有男子更钟情于非妻子的某女子，同时该女子也更钟情于该男子。换句话说，对于每一个人，其心目中比当前伴侣更好的异性都不会认为自己也是一个更好的选择，请注意，稳定婚姻未必是使每个人都最为满意的婚姻。

具有稳定婚姻的社会当然是美好而令人向往的，苏格拉底眼中的婚姻当然都是稳定婚姻，但问题是稳定婚姻是否必然存在呢？

答案在盖尔与沙普利的著名论文College Admissions and the Stability of Marriage(《高校招生与稳定婚姻》)中给出，根据盖尔-沙普利定理——稳定婚姻必定存在。

按照中国的传统，我们假定在每一轮“相亲”过程中，每个男子都向其最为钟情的女子求婚，而每个女子都采取最佳策略，即在任何一轮“相亲”中都“暂时接受”当前所有求婚男子中她最钟情者同时拒绝其他求婚的男子，并继续等待她心中的白马王子出现(随即与其订婚)。

可以看出，没有任何一个男子是被其求婚的女子最为钟情的，因此所有女子的策略都是“暂时接受”当前的求婚男子而并不与其“订婚”，但是，由于没有任何一个男子受到其求婚对象的拒绝，于是每个男子都不会发起第二轮求婚，所以第一轮相亲获得圆满成功而成为最后的匹配。

在本例中，尽管所有女子均未等到她们的白马王子，然而每个男子均成功地得到了各自的梦中情人，因此最终的匹配是使所有男子最为满意的稳定婚姻。

可以总结出男子主动求婚的盖尔-沙普利算法如下：

第一轮先让所有男子向自己最钟情的女子求婚，然后让所有女子挑选最中意的，并剔除所有其他人；

第二轮让没有被选中的男子再次向自己第二钟情的女子求婚，然后让所有女子挑选最中意的，并剔除所有其他人；

第三轮重复第二轮，直到所有人找到配偶为止。

盖尔与沙普利还证明了下面十分有趣又令人深思的结论：

结论1：男子主动策略是男子的最佳策略！换句话说，每个男子的妻子是“最佳的”，即在稳定婚姻匹配中每个男子更钟情的女子都会认为现在的丈夫更好。

结论2：男子主动策略是女子的最差策略！换句话说，每个女子的丈夫是“最差的”，即每个女子现在的丈夫是所有稳定婚姻匹配中她所最不心仪的男子。

盖尔与沙普利关于稳定婚姻的理论至少有两条价值连城的启示：一是先下手为强，后下手遭殃！此条对适龄女生尤为重要，守株待兔等不到白马王子，主动出击方可能实现美好人生！二是通往诺贝尔经济学奖的最短路线是数学！

（摘编自《数学的天空》，由张跃辉、李吉有、朱佳俊合著）

被称为“数学的皇后”古老的数论魅力何在

■萨日娜

数学，作为人类思维的表达形式，需要缜密周详的推理以及对完美境界的追求。数学研究既需要逻辑性、分析性和一般性，也需要直观性、构作性和个别性。虽然不同的数学分支强调不同的侧面，但这些互相对立的思维碰撞构成了数学科学的生命力、实用性及其崇高价值。

数论(Number Theory)是数学的一个分支，主要研究数的规律和整数性质。德国数学家高斯曾写道：“数学是科学的皇后，而数论是数学的皇后”，数论研究中的各种猜想是数学皇冠上一颗颗璀璨的明珠。

11月8日，笔者在线聆听了张益唐在线讲解学术论文“离散均值估计和朗道-西格尔零点”，又重新感受到了曾在博士期间经受的数学研究带来的快乐和烦恼。数论猜想可谓魅力无穷，几代中国数学家也屡次收获成果，其背后是吃苦耐劳、坚韧不拔和不图名利、追求真理的科学家精神。

“韩信点兵”，原来是一个关于数论的故事

数论是数学研究最古老的方向。信奉“数即万物”的古希腊数学家毕达哥拉斯在公元前6世纪就研究了整数的可除性问题，提出奇数、偶数、素数、复合数、完全数和亲和数等概念。

演绎体系的集大成者欧几里得公元前4世纪发现自然数的基本规律，指出素数有无穷多个，每个复合数都可以唯一地表示成素数的乘积，又求出两个正整数最大公约数的算法，建立了整除性的初步理论。

大约在公元前250年，埃拉托斯特尼发明了一种筛法，求出了不超过某个自然数N的全部素数，这是陈景润和张益唐在研究“孪生素数猜想”时使用的主要方法。

公元4世纪，希腊化时期的数学家丢番图用初等数论研究了一系列不定方程的求解问题，提出著名的丢番图猜想。其著作《算术》的拉丁文译本初刊于1621年，此后再版多次，成为17世纪以后欧洲学者研究并提出更多数论猜想的思想源泉。

中国人很早就有初等数论的研究和探讨，在传说中和历史文献中均有相关记载。“韩信点兵”便是知名的数论故事。秦朝末年，楚汉相争，韩信率兵打仗。某次，他急需点兵迎战，就命士兵布阵三次(命3人一排，多出2名；命5人一排，多出3名；命7人一排，多出2名)后，直言有1073名勇士可击垮敌兵，其神机妙算鼓舞士气，旌旗摇动，大败楚军。

公元前1世纪的《周髀算经》中出现商高定理(勾股定理)；西汉初成书的《九章算术》标志我国传统数学体系的完备化，其中的“五家共井”问题，给出了不定方程组的整数解；公元4世纪的《孙子算经》中有“物不知数”问题，求解一次同余式组，标志着我国古代初等数论的程序化；公元5世纪的《张丘建算经》有“百鸡问题”给出几组不同的整数解；南宋数学家秦九韶的《数书九章》用“大衍求一术”解决了一次同余式组的求解问题，传之欧洲后被称作“中国剩余定理”。秦九韶被德国数学家、集合论的创始人康托尔称为“最幸运的天才”。“科学史之父”萨顿称秦九韶“是他那个民族、他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一。”

每个著名猜想背后，都闪烁着数学家的智慧

17世纪以后，西方学界开始深入研究初等数论问题。

1640年，费马在研读丢番图《算术》之后，提出一个数论命题：如果p是素数，那么对于任何整数a，ap-a 都是p的倍数，但他却没有给出证明。这个困扰数学界近100年的“费马小定理”，1736年由欧拉给出证明，又将它推广到复合数的情形。

1772年，拉格朗日证明了费马提出的另一个定理：每一个正整数都可以用四个整数的平方和表示。1798年，勒让德总结前人的数论成果，编著了第一部数论教科书。

1900年，希尔伯特在巴黎世界数学家大会上做了题为“数学问题”的经典报告，提出了23个意义深远的数学难题，史称“希尔伯特问题”。期间，他特别指出费马大定理对于数论乃至整个数学领域的重要意义。依据希尔伯特的观点，数学家库默尔将高斯的复整数理论推广到代数数，引入了理想数与分圆数，开创理想数论，开启了从代数数论出发证明的新路径。费马大定理历时350年后，1995年由英国数学家怀尔斯给出了完美的证明。

国内数学界或普通读者都比较熟悉的哥德巴赫猜想，正是“希尔伯特问题”中一个著名的猜想。其内容是“任何不小于6的偶数都是两个奇素数之和，任何不小于9的奇数都是三个奇素数之和”。这一问题于1742年由德国数学家哥德巴赫提出后，长期被悬置，20世纪初由哈代和李特尔伍德给出部分证明，又经我国陈景润等数学家的推进，最终由苏联数学家维诺格拉朵夫等人解决。

在张益唐第一篇论文中解决的“孪生素数猜想”，被称作是“哥德巴赫猜想”的姐妹问题，也是23个“希尔伯特问题”之一，1849年由波林那克提出。

2013年5月，张益唐证明孪生素数猜想的一个弱化形式，取得突破性进展。在不依赖未经证明推论的前提下，他发现存在无穷多个之差小于7000万的素数对。其论文5月14号在网络上公开，5月21日正式发表。7天后，这个常数下降到了6000万，10天后的5月31日，下降到了4200万，又过了3天(6月2日)变成1300万，次日成为500万。6月5日，40万。9个月后，张益唐的7000万被缩小到246。在英国数学家蒂姆·高尔等人发起的“博学之人(Polymath)”计划中，孪生素数猜想成为21世纪数学工作者们利用网络进行合作研究的一个典型案例。人们不断改进张益唐的证明，推进着最终解决孪生素数猜想的距离。

百折不挠勇于进取，历代学人的优秀品质书写学界佳话

杨武之是我国第一位数学博士，也是中国现代数论研究的先驱和开拓者。正是杨武之将现代数论引进中国，并培养了大批人才。柯召和华罗庚就是杨武之在清华培养的学生。新中国成立后，华罗庚在中国科学院数学研究所组建讨论班，带领王元、陈景润等人专门攻克哥德巴赫猜想。

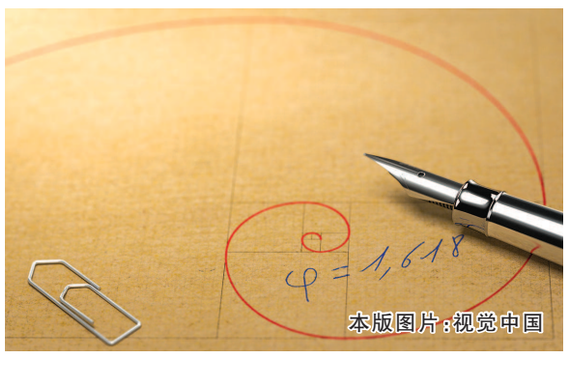
北京大学数学系成立之初便有数论课程，也培养了一批重要学者，潘承洞、潘承彪为其中的佼佼者。上世纪50年代，潘承洞在研究中获得关于算术数列中最小素数的上界定量估计，其结果被国内外文献广泛引用。60年代后，他主要从事哥德巴赫猜想的研究，为后来的证明打下了基础。70年代在简化陈(景润)氏定理(1,2)时提出并证明了一条新的均值定理，是对邦别里定理的重要推广与发展。1982年，他与陈景润、王元同获国家自然科学奖一等奖。

张益唐于1978年考入北大数学系，1982年继续攻读研究生，攻克数论问题，指导老师就是潘承彪。他以优异成绩毕业后赴美留学，本想师从著名数论学者亨里克·伊万涅茨，却阴差阳错做了别的数学研究。英雄相见恨晚，却惺惺相惜，在属于张益唐的2013年春天，伊万涅茨应《数学年刊》主编之邀，审读张益唐的论文，仅用三周时间看出其价值，推荐刊载于这个已有130多年历史的数学界顶级期刊上。

张益唐2014年受邀在国际数学家大会上做特邀报告，又获罗夫·肖克数学奖、弗兰克·奈尔森·科尔数论奖、麦克阿瑟天才奖等诸多奖项。近年，张益唐成为北大闵嗣鹤数论研究中心名誉主任、客座讲席教授，还给数学系的学生们讲授暑期课程。张益唐能够在数论方面取得举世瞩目的成就，与他在北大数学系打下的数论基础密不可分。在今年11月8日的报告中，他也多次谈到北大数学系潘教授对他的指导和影响。

“板凳要坐十年冷，文章不写一句空”，获得优异学术成果的前辈学者们大都具备了不怕困难、百折不挠、勇于进取的优秀品质，张益唐也不例外。这种品质要经过艰苦锤炼才能形成，任何时候都不会过时。传统数论研究是中华优秀传统文化之中的瑰宝，其中蕴含着前辈先贤的智慧。21世纪成为数学大国，也是时代给予中国年轻一代的光荣使命。

（作者为东京大学理学博士，上海交通大学教授）



本版图片：视觉中国